1.11. Квазистационарное приближение. Основные уравнения. Границы применимости

Начнём с уравнений Максвелла-Лоренца:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0. \end{cases}$$

Самое сложное уравнение – конечно, первое. Оно означает, что магнитное поле вызвано не только токами **j**, но и изменением электрического поля $\frac{\partial D}{\partial t}$.

Приближение первое: мы пренебрегаем $\frac{\partial D}{\partial t}$, говоря, что всё меняется достаточно медленно – не зря же приближение называется «квазистационарным». У нас, конечно, не стационарно (зависимость от времени есть), но квазистационарно, т.е. неспешно.

Замечание , если хотите понтануться умным словечком. Токи, вызванные $\frac{\partial D}{\partial t}$,называются токами смещения, и именно ими мы пренебрегаем.

Получаем упрощённую систему:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ \vec{B} = \mu\vec{H},\ \vec{j} = \sigma\vec{E},\ \mu,\sigma = const. \end{cases}$$

И вот оказывается, если её решить, то E, H и j будут подчиняться одним и тем же уравнениям:

$$\Delta \vec{H} = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{E} = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$$\Delta \vec{j} = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}.$$

Опытный читатель сразу узнает в этих уравнениях уравнения теплопроводности.

Выведем уравнение для H (для E и j вывод аналогичен, Соколов также приводит вывод только для H).

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \vec{B} = \mu\vec{H},\ \ \vec{j} = \sigma\vec{E},\ \ \mu, \sigma = const. \end{cases}$$

взяли ротор

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\sigma\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\sigma\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Осталось заметить, что rot rot **H** = grad div **H** - Δ **H**. Но grad div **H** = 0, т.к. H=μB, а div B=0. Ч.т.д.

Важное, но скучное замечание, которое нужно при ответе на вопрос. Условие «всё меняется по-эстонски медленно», как правило, записывается для частного случая (см. название файла!) – гармонических колебаний с частотой ω. И там оно разбивается на 2:

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \frac{\omega L}{c} \sim \frac{L}{\lambda} \ll 1$$

где L – характерный размер системы.

Теперь перейдём к скин-эффекту

1.12. Проникновение периодически меняющихся полей в проводник (в квазистационарном приближении). Скин-эффект

Если вдруг вы не знаете, что такое сам скин-эффект, бегом читать Электрод27! Прочитали? Отлично ☺ Сейчас мы будем скин-эффект выводить и заодно решать задачу 28.2

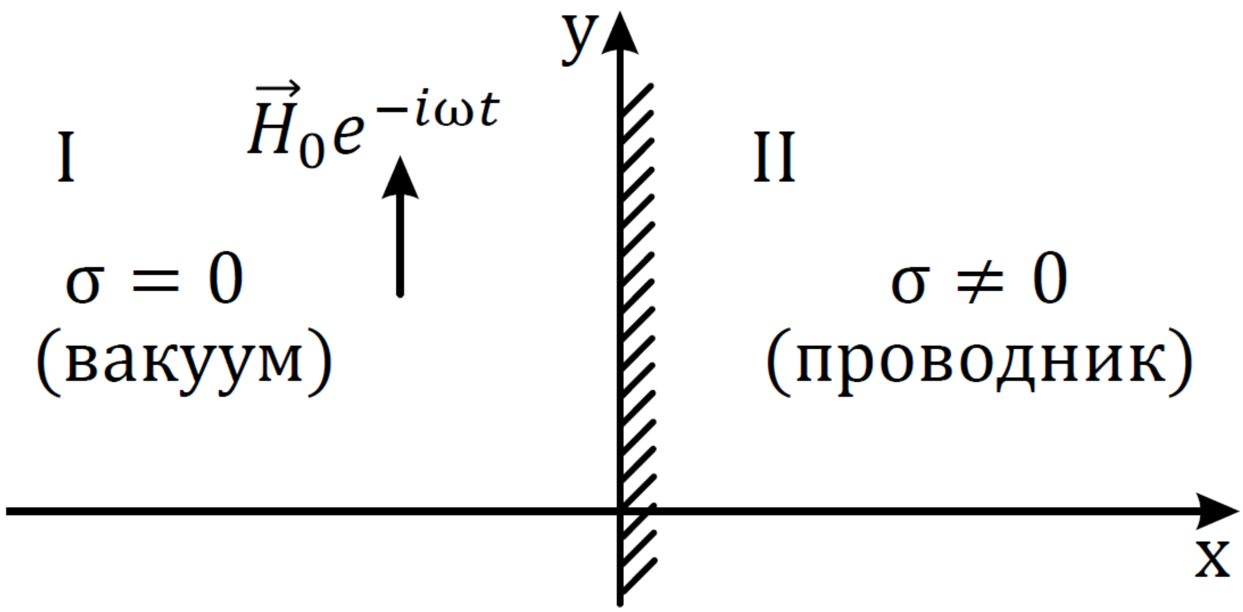
ЗАДАЧА 28.2

28.2. Внутри проводника имеется цилиндрическая полость радиуса R, в которой по тонкому прямому проводу параллельно оси на расстоянии d от нее протекает переменный ток $J_0\cos(\omega t)$. В приближении идеального проводника $(\delta \ll d < R)$ найти плотность тока на поверхности полости.

очень схожи, настолько, что в решении 28.2 этот выводе скин-эффекта и содержится. Так что предлагаю убить двух зайцев одним выстрелом ☺

Давайте сперва рассмотрим случай с 1 границей, а потом применительно к 28.2, где будет более сложный случай с 2 границами:

Сознательно не останавливаюсь на том, что такое скин-эффект (отсылаю к Электроду27), приведу лишь вывод.



в прошлый раз мы вывели уравнение

$$\Delta\vec{H} = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

Го его юзать!

$$\begin{cases} \Delta\vec{H}^{I} = 0, \\ \Delta\vec{H}^{II} = \dfrac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\dfrac{\partial\vec{H}^{II}}{\partial\tau} \end{cases}$$

Поясним, что $\Delta\vec{H}^{I} = 0$, т.к. в вакууме σ=0, и вся шняга $\dfrac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\dfrac{\partial\vec{H}^{II}}{\partial\tau}$ оказывается =0.

ГУ элементарное – непрерывность: $H_\tau^I = H_\tau^{II}\Big|_{z=0}$

Т.к. снаружи проводника поле направлено вдоль оси у, то и внутри проводника логично его искать направленным вдоль оси у:

$$\vec{H}^{II} = H_2(z)e^{-i\omega t}\vec{e}_y$$

После подстановки получим: $\dfrac{d^2H_2(z)}{dz^2} = -i\dfrac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}H_2(z)$

Элементарное ДУ второго порядка. Его решение:

Пусть $H_2(z) \sim e^{\alpha z}$, где $\alpha = const$. Тогда:

$$\alpha^2 = -\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}i.$$

Будем называть толщиной скин-слоя величину:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}.$$

Тогда:

$$\alpha^2 = -\frac{2}{\delta^2}i = \frac{2}{\delta^2}e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Тогда получим:

$$\alpha_{1,2} == \pm\frac{\sqrt{2}}{\delta}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm\frac{1-i}{\delta}.$$

Решение для амплитуды поля в проводнике примет вид:

$$H_2(z) = C_1e^{\alpha_1 z} + C_2e^{\alpha_2 z} = C_1e^{\frac{1-i}{\delta}z} + C_2e^{-\frac{1-i}{\delta}z}.$$

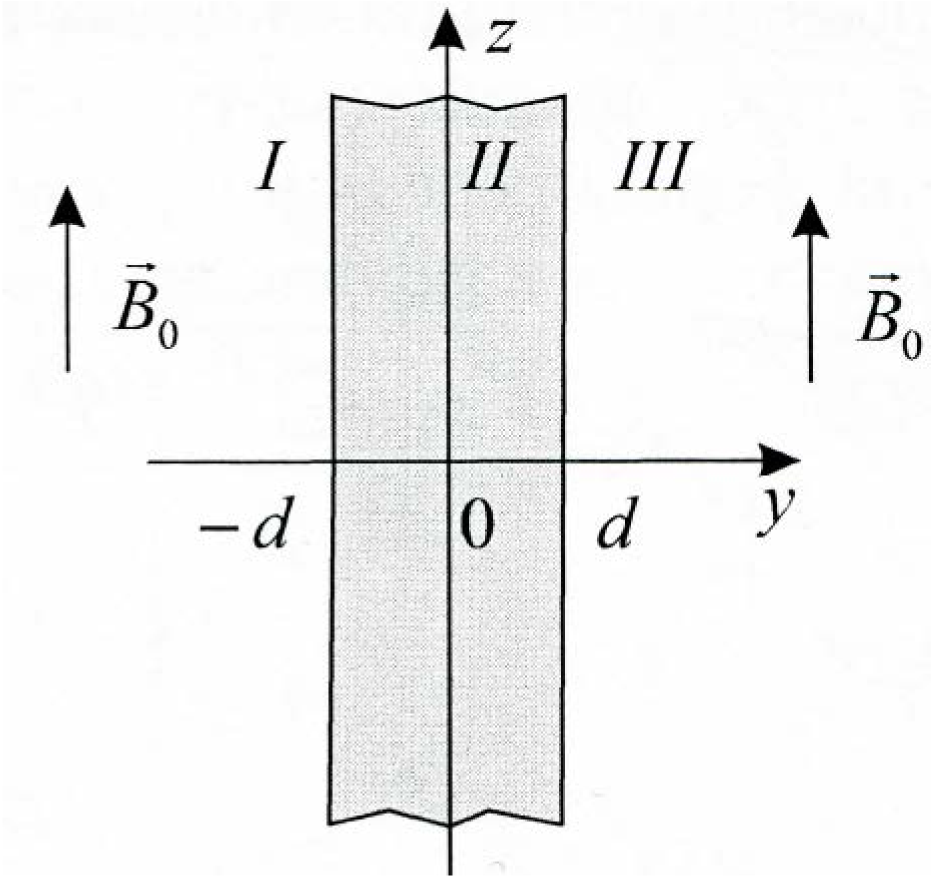
Слагаемое $C_1e^{\frac{1-i}{\delta}z}$ нам не нравится, т.к. там поле растёт с ростом z, а нам бы надо $H_2(z) \xrightarrow[z\to 0]{} 0$. Поэтому C1=0 и

$$\vec{H}^{II} = C_2e^{-\frac{1-i}{\delta}z}e^{-i\omega t}\vec{e}_y.$$

Из граничных условий находим C2:

$$H_\tau^I = H_\tau^{II}\Big|_{z=0} \Rightarrow C_2 = H_0$$

Отлично, что касается к выводу формулы для теорвопроса на экзамене, то всё. Теперь посмотрим на 28.2. В чём отличие? Отличие в 2 границах:



Граница при y=-d и ещё одна граница при y=d!
А так всё точно так же:

$$\Delta\vec{B}^{I} = 0, \qquad \Delta\vec{B}^{III} = 0, \qquad \Delta\vec{B}^{II} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{B}^{II}}{\partial t}$$

Искать B в 1-й и 3-й области неинтересно, потому что там решение мы уже знаем: $\mathbf{B}=B_0\cos(\omega t)\mathbf{e_z}$. Интересно лишь решение во второй области. Аналогично выводу формулы ищем решение в виде $B(y)e^{iwt}$, подставляем $\frac{\partial B}{\partial t} = iBw$, получаем ДУ 2 порядка

$$\frac{d^2B}{dy^2} = \frac{-4\pi i\sigma\mu\omega}{c^2}B(y)$$

на B(y) с двумя ГУ:

$$\frac{1}{\mu}B(y=-d) = B_0 = \frac{1}{\mu}B(y=d)$$

А почему именно такими ГУ, с 1/μ? Потому что у границы сохраняются тангенциальные компоненты именно H, а не B:

$$H_\tau^I = H_\tau^{II}\Big|_{y=\pm d}$$

Так вот, решаем ДУ с двумя ГУ. Решения ищется в виде

$$B(y) = a\mathrm{sh}(\alpha y) + b\mathrm{ch}(\alpha y)$$

Но т.к. B(y) в точках d и –d одинакова, у нас остаётся лишь чётный чосинус, а нечётный шинус идёт лесом.

Далее определяем константы b и α:

$$\vec{B}^{II} = B(y)\exp(-i\omega t)\vec{e}_z = \frac{\mu B_0}{\mathrm{ch}(\alpha d)}\mathrm{ch}(\alpha y)\exp(-i\omega t)\vec{e}_z, \qquad \alpha = \frac{1-i}{\delta}. \quad (14)$$

Для перехода к физически наблюдаемым величинам в полученном выражении необходимо вычислить вещественную часть. Выполним это вычисление для фиксированного момента времени, например $t = 0$, и определим зависимость $Re[B]$ от координаты:

$$B(y) \to Re[B(y)] = \mu B_0 Re\left[\frac{\mathrm{ch}(\alpha y)}{\mathrm{ch}(\alpha d)}\right] = \mu B_0 Re\left[\frac{\mathrm{ch}(y/\delta - iy/\delta)}{\mathrm{ch}(d/\delta - id/\delta)}\right] \quad (15)$$

$$= \mu B_0 Re\left[\frac{\mathrm{ch}(y/\delta)\cos(y/\delta) - i\mathrm{sh}(y/\delta)\sin(y/\delta)}{\mathrm{ch}(d/\delta)\cos(d/\delta) - i\mathrm{sh}(d/\delta)\sin(d/\delta)}\right]$$

$$= \mu B_0 \frac{\mathrm{ch}(y/\delta)\mathrm{ch}(d/\delta)\cos(y/\delta)\cos(d/\delta) + \mathrm{sh}(y/\delta)\mathrm{sh}(d/\delta)\sin(y/\delta)\sin(d/\delta)}{\mathrm{ch}^2(d/\delta)\cos^2(d/\delta) + \mathrm{sh}^2(d/\delta)\sin^2(d/\delta)},$$

где учтено, тождество $\mathrm{ch}(x-y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$, а также что $\mathrm{ch}(ix) = \cos(x)$ и $\mathrm{sh}(ix) = i\sin(x)$.

Графики при μ=1:

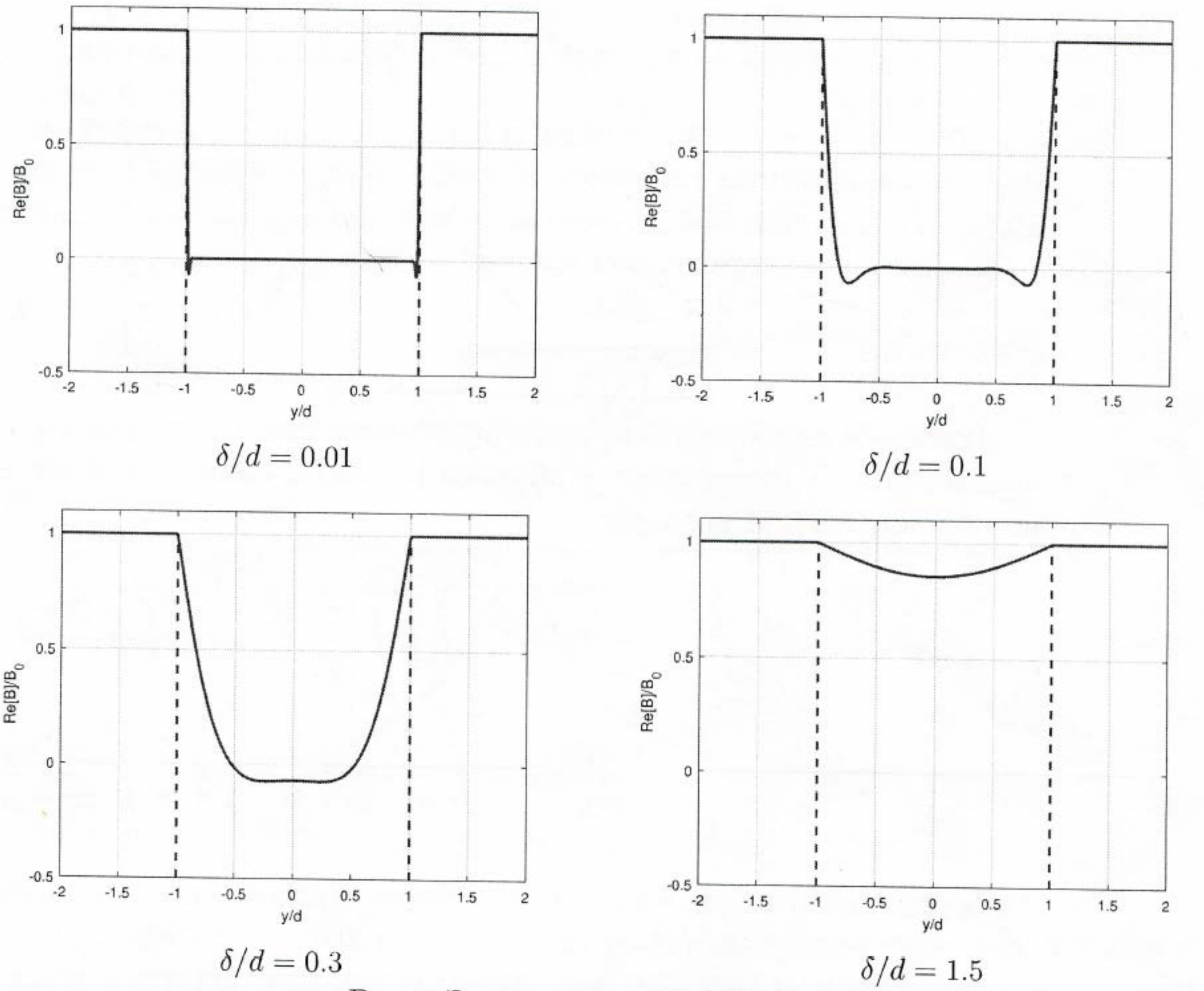


Рис.1 Зависимость $Re[B(y)]$

Обратите внимание: при б/d (малая толщина скин-слоя) поля внутри проводника и нет. При б/d=0,3 оно уже частично проникает, а при б/d=1,5 проникает почти свободно.